SMO Finalrunde 2010

erste Prüfung - 12.März 2010

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Drei Spielsteine liegen auf der Zahlengeraden in ganzzahligen Punkten. In einem Zug kann man zwei Steine auswählen und einen davon um eins nach rechts, den anderen um eins nach links verschieben. Für welche Anfangspositionen kann man mit einer Folge von Zügen alle Spielsteine in einen Punkt schieben?

2. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und $AB \neq AC$. Der Inkreis berühre die Seiten BC, CA bzw. AB bei D, E bzw. F. Sei M der Mittelpunkt von EF. Die Gerade AD schneide den Inkreis bei $P \neq D$. Beweise, dass $PMID$ ein Sehnenviereck ist.

3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die gilt

$$(4a - b)(4b - a) = 2010^n.$$

4. Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen mit $xyz = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x + y + z.$$

5. Betrachte die Eckpunkte eines regulären n-Ecks und verbinde diese mit Seiten oder Diagonalen irgendwie zu einem geschlossenen Streckenzug, der jede Ecke genau einmal durchläuft. Ein *paralleles Paar* ist eine Menge von zwei verschiedenen parallelen Strecken in diesem Streckenzug. Zeige:

(a) Ist n gerade, dann gibt es stets mindestens ein paralleles Paar.

(b) Ist n ungerade, dann existiert nie genau ein paralleles Paar.

SMO Finalrunde 2010

zweite Prüfung - 13. März 2010

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfüllt ist:
$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

7. Seien m, n natürliche Zahlen, sodass $m+n+1$ prim ist und ein Teiler von $2(m^2+n^2)-1$. Zeige, dass $m = n$ gilt.

8. In einem Dorf mit mindestens einem Einwohner gibt es mehrere Vereine. Jeder Einwohner des Dorfes ist Mitglied in mindestens k Vereinen und je zwei verschiedene Vereine haben höchstens ein gemeinsames Mitglied. Zeige dass mindestens k dieser Vereine dieselbe Anzahl Mitglieder haben.

9. Seien k und k' zwei konzentrische Kreise mit Mittelpunkt O. Der Kreis k' sei grösser als der Kreis k. Eine Gerade durch O schneide k in A und k' in B, sodass O zwischen A und B liegt. Eine andere Gerade durch O schneidet k in E und k' in F, sodass E zwischen O und F liegt. Zeige, dass sich der Umkreis von OAE, der Kreis mit Durchmesser AB und der Kreis mit Durchmesser EF in einem Punkt schneiden.

10. Sei $n \geq 3$ und sei P ein konvexes n-Eck. Beweise, dass sich P mit Hilfe von $n-3$ sich nicht schneidenden Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt, sodass der Umkreis von jedem dieser Dreiecke ganz P enthält. Wann existiert genau eine solche Zerlegung?