SMO Finalrunde 2008

erste Prüfung - 14.März 2008

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC \neq 45^\circ$ und $\sphericalangle ABC \neq 135^\circ$. Sei P der Punkt auf der Geraden AB mit $\sphericalangle CPB = 45^\circ$. Seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ACP und BCP. Zeige, dass die Fläche des Vierecks CO_1PO_2 gleich gross ist wie die Fläche des Dreiecks ABC.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt:

$$f(xy) \leq \frac{xf(y) + yf(x)}{2}.$$

3. Zeige, dass jede Zahl der Form

$$2^{5^{2^{5^{\cdot^{\cdot}}}}} + 4^{5^{4^{5^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

durch 2008 teilbar ist, wobei die Exponententürme beliebige, voneinander unabhängige Höhen ≥ 3 haben.

4. Betrachte drei Seiten eines $n \times n \times n$-Würfels, die an einer der Würfelecken zusammenstossen. Für welche n ist es möglich, diese vollständig und überlappungsfrei mit Papierstreifen der Grösse 3×1 zu bedecken? Die Papierstreifen können dabei auch über die Kanten zwischen diesen Würfelseiten hinweggeklebt werden.

5. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Bestimme den geometrischen Ort aller Punkte P mit der Eigenschaft

$$AP \cdot CP + BP \cdot DP = 1.$$

SMO Finalrunde 2008

zweite Prüfung - 15. März 2008

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Bestimme alle ungeraden natürlichen Zahlen der Form

$$\frac{p+q}{p-q},$$

wobei $p > q$ Primzahlen sind.

7. Ein 8×11-Rechteck aus Einheitsquadraten wird irgendwie in 21 zusammenhängende Teile zerlegt. Beweise, dass mindestens zwei dieser Teile bis auf Rotationen und Spiegelungen dieselbe Form haben.

8. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, das einen Umkreis besitzt. Beweise, dass sich die Diagonalen AD, BE und CF genau dann in einem Punkt schneiden, wenn gilt

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

9. Betrachte sieben verschiedene Geraden in der Ebene. Ein Punkt heisst *gut*, falls er auf mindestens drei dieser Geraden liegt. Bestimme die grösstmögliche Anzahl guter Punkte.

10. Finde alle Paare (α, β) von positiven reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle positiven reellen Zahlen x, y, z, w gilt

$$x + y^2 + z^3 + w^6 \geq \alpha(xyzw)^\beta.$$

(b) Es gibt ein Quadrupel (x, y, z, w) von positiven reellen Zahlen, sodass in (a) Gleichheit gilt.