SMO - Turno finale 2007

primo esame - 23 marzo 2007

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Determina tutte le soluzioni reali positive del seguente sistema di equazioni:

$$a = \max\{\tfrac{1}{b}, \tfrac{1}{c}\} \qquad b = \max\{\tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{d}\} \qquad c = \max\{\tfrac{1}{d}, \tfrac{1}{e}\}$$
$$d = \max\{\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{f}\} \qquad e = \max\{\tfrac{1}{f}, \tfrac{1}{a}\} \qquad f = \max\{\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{b}\}$$

2. Siano a, b, c tre numeri interi tali che $a + b + c$ è divisibile per 13. Dimostra che anche

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

è divisibile per 13.

3. Considera il piano diviso in quadrati unitari. Ogni quadrato deve essere colorato con uno tra n colori in modo che se quattro quadrati possono essere coperti con un L-Tetromino, allora questi quadrati devono avere quattro colori diversi (il L-Tetromino può essere ruotato e riflesso). Determina il più piccolo valore di n per cui questo è possibile.

4. Sia ABC un triangolo acuto con $AB > AC$ e sia H il punto di intersezione delle altezze. Sia D il punto di intersezione dell'altezza passante per A con il lato BC. Si ottenga E specchiando C rispetto a D. Sia S il punto di intersezione delle rette AE e BH. Sia N il punto medio di AE, e M quello di BH. Dimostra che MN e DS sono perpendicolari.

5. Determina tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con le seguenti caratteristiche:

(a) $f(1) = 0$,
(b) $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$,
(c) Per ogni $x, y \geq 0$ tali che $x + y > 0$, vale

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Buon lavoro!

SMO - Turno finale 2007

secondo esame - 24 marzo 2007

Durata: 4 ore
Ogni esercizio vale 7 punti.

6. Tre cerchi k_1, k_2, k_3 della stessa grandezza si incrociano (non tangenzialmente) in un punto P. Siano A e B i centri dei cerchi k_1 e k_2. Sia D il punto di intersezione diverso da P di k_3 con k_1, e C quello di k_3 con k_2. Dimostra che $ABCD$ è un parallelogrammo.

7. Siano a, b, c numeri reali non negativi con media aritmetica $m = \frac{a+b+c}{3}$. Dimostra che vale

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}} \leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

8. Sia $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ un insieme con la seguente caratteristica: tra qualsiasi tre numeri di M, se ne possono sempre scegliere due tali che il primo è divisibile per il secondo. Quanti numeri può contenere M al massimo?

9. Determina tutte le coppie (a, b) di numeri naturali tali che

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1}$$

è un numero intero.

10. Suddividi il piano in triangoli equilateri di lato 1. Considera un triangolo equilatero di lato n i cui lati giacciono sul reticolo determinato dalla suddivisione in triangoli unitari. Su ogni punto di intersezione del reticolo sui lati e all'interno di questo triangolo è posta una pedina. Considera il gioco in cui in ogni mossa si sceglie un triangolo unitario che abbia esattamente due angoli coperti da una pedina. Queste due pedine vengono rimosse, e sul terzo angolo viene posta una nuova pedina. Per quali n è possibile che dopo un numero finito di mosse resta solo una pedina?

Buon lavoro!