SMO Finalrunde 2007

erste Prüfung - 23. März 2007

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle positiven reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$a = \max\{\tfrac{1}{b}, \tfrac{1}{c}\} \qquad b = \max\{\tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{d}\} \qquad c = \max\{\tfrac{1}{d}, \tfrac{1}{e}\}$$
$$d = \max\{\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{f}\} \qquad e = \max\{\tfrac{1}{f}, \tfrac{1}{a}\} \qquad f = \max\{\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{b}\}$$

2. Seien a, b, c drei ganze Zahlen, sodass $a + b + c$ durch 13 teilbar ist. Zeige, dass auch

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

durch 13 teilbar ist.

3. Die Ebene wird in Einheitsquadrate unterteilt. Jedes Feld soll mit einer von n Farben gefärbt werden, sodass gilt: Können vier Felder mit einem L-Tetromino bedeckt werden, dann haben diese Felder vier verschiedene Farben (das L-Tetromino darf gedreht und gespiegelt werden). Bestimme den kleinsten Wert von n, für den das möglich ist.

4. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$ und Höhenschnittpunkt H. Sei D der Höhenfusspunkt von A auf BC. Sei E die Spiegelung von C an D. Die Geraden AE und BH schneiden sich im Punkt S. Sei N der Mittelpunkt von AE und sei M der Mittelpunkt von BH. Beweise, dass MN senkrecht auf DS steht.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f(1) = 0$,

(b) $f(x) > 0$ für alle $x > 1$,

(c) Für alle $x, y \geq 0$ mit $x + y > 0$ gilt

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2007

zweite Prüfung - 24. März 2007

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Drei gleich grosse Kreise k_1, k_2, k_3 schneiden sich nichttangential in einem Punkt P. Seien A und B die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2. Sei D bzw. C der von P verschiedene Schnittpunkt von k_3 mit k_1 bzw. k_2. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

7. Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit arithmetischem Mittel $m = \frac{a+b+c}{3}$. Beweise, dass gilt

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}} \leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

8. Sei $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ eine Menge mit folgender Eigenschaft: Unter je drei Zahlen aus M kann man stets zwei auswählen, sodass die eine durch die andere teilbar ist. Wieviele Zahlen kann M höchstens enthalten?

9. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1}$$

eine ganze Zahl ist.

10. Die Ebene wird in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 unterteilt. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge n, dessen Seiten auf den Gitterlinien liegen. Auf jedem Gitterpunkt auf dem Rand und im Innern dieses Dreiecks liegt ein Stein. In einem Spielzug wird ein Einheitsdreieck ausgewählt, welches auf genau 2 Ecken mit einem Stein belegt ist. Die beiden Steine werden entfernt, und auf die dritte Ecke wird ein neuer Stein gelegt. Für welche n ist es möglich, dass nach endlich vielen Spielzügen nur noch ein Stein übrig bleibt?

Viel Glück!