SMO Finalrunde 2006

erste Prüfung - 31. März 2006

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2).$$

2. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und sei D ein innerer Punkt der Seite BC. Ein Kreis berühre BC in D und scheide die Seiten AB und AC in den inneren Punkten M, N und P, Q. Beweise, dass gilt

$$|BD| + |AM| + |AN| = |CD| + |AP| + |AQ|.$$

3. Berechne die Quersumme der Zahl

$$9 \times 99 \times 9999 \times \cdots \times \underbrace{99 \ldots 99}_{2^n},$$

wobei sich die Anzahl Neunen in jedem Faktor verdoppelt.

4. Ein Kreis mit Umfang $6n$ wird durch $3n$ Punkte in je n Intervalle der Länge 1, 2 und 3 zerlegt. Zeige, dass es stets zwei dieser Punkte gibt, welche auf dem Kreis diametral gegenüber liegen.

5. Ein Kreis k_1 liegt innerhalb eines zweiten Kreises k_2 und berührt diesen im Punkt A. Eine Gerade durch A schneide k_1 nochmals in B und k_2 in C. Die Tangente an k_1 durch B schneide k_2 in den Punkten D und E. Die Tangenten an k_1 durch C berühren k_1 in den Punkten F und G. Beweise, dass D, E, F und G auf einem Kreis liegen.

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2006

zweite Prüfung - 1. April 2006

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. In einem Tennisturnier haben mindestens drei Spieler teilgenommen. Dabei haben je zwei Spieler genau einmal gegeneinander gespielt, und jeder Spieler hat mindestens ein Match gewonnen. Zeige, dass es drei Spieler A, B, C gibt, sodass A gegen B, B gegen C und C gegen A gewonnen hat.

7. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle ABC = 60°$. Nehme an, es sei $|BC| = |CD|$. Beweise, dass gilt

$$|CD| + |DA| = |AB|.$$

8. Leute aus n verschiedenen Ländern sitzen an einem runden Tisch, sodass für je zwei Personen aus demselben Land ihre direkten Sitznachbarn rechts von ihnen aus verschiedenen Ländern stammen. Was ist die grösstmögliche Anzahl Personen, die am Tisch Platz nehmen können?

9. Seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + d^2 + 1) \geq 2(a + c)(b + d).$$

10. Entscheide, ob es eine ganze Zahl $n > 1$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

(a) n ist keine Primzahl.

(b) Für alle ganzen Zahlen a ist $a^n - a$ durch n teilbar.

Viel Glück!