SMO Finalrunde 2005

erste Prüfung - 24. März 2005

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck und seien D, E, F die Seitenmitten von BC, CA, AB. Die Schwerlinien AD, BE und CF schneiden sich im Schwerpunkt S. Mindestens zwei der Vierecke

$$AFSE, \quad BDSF, \quad CESD$$

seien Sehnenvierecke. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

2. Von $4n$ Punkten in einer Reihe sind $2n$ weiss und $2n$ schwarz gefärbt. Zeige, dass es $2n$ aufeinanderfolgende Punkte gibt, von denen genau n weiss und n schwarz sind.

3. Beweise für alle $a_1, \ldots, a_n > 0$ die folgende Ungleichung und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k \leq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

4. Bestimme alle Mengen M natürlicher Zahlen, sodass für je zwei (nicht notwendigweise verschiedene) Elemente a, b aus M auch

$$\frac{a+b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$$

in M liegt.

5. Ein konvexes n-Eck zu *zwacken* bedeutet Folgendes: Man wählt zwei benachbarte Seiten AB und BC aus und ersetzt diese durch den Streckenzug AM, MN, NC, wobei $M \in AB$ und $N \in BC$ beliebige Punkte im Innern dieser Strecken sind. Mit anderen Worten, man schneidet eine Ecke ab und erhält ein $(n+1)$-Eck.
Ausgehend von einem regulären Sechseck $\mathcal{P}_6$ mit Flächeninhalt 1 wird durch fortlaufendes Zwacken eine Folge $\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8, \ldots$ konvexer Polygone erzeugt. Zeige, dass der Flächeninhalt von $\mathcal{P}_n$ für alle $n \geq 6$ grösser als $\frac{1}{2}$ ist, unabhängig davon wie gezwackt wird.

SMO Finalrunde 2005

zweite Prüfung - 25. März 2005

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Bestimme alle möglichen Werte, die der Ausdruck

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}$$

annehmen kann.

7. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$7 \cdot 4^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

8. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. M und N seien zwei beliebige Punkte auf den Seiten AB respektive AC. Die Kreise mit den Durchmessern BN und CM schneiden sich in den Punkten P und Q. Zeige, dass die Punkte P, Q und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen.

9. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(yf(x))(x+y) = x^2(f(x) + f(y)).$$

10. An einem Fussballturnier nehmen $n > 10$ Mannschaften teil. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Ein Sieg gibt zwei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt, und eine Niederlage keinen Punkt. Nach dem Turnier stellt sich heraus, dass jede Mannschaft genau die Hälfte ihrer Punkte in den Spielen gegen die 10 schlechtesten Mannschaften gewonnen hat (insbesondere hat jede dieser 10 Mannschaften die Hälfte ihrer Punke gegen die 9 übrigen gemacht). Bestimme alle möglichen Werte von n, und gib für diese Werte ein Beispiel eines solchen Turniers an.