SMO Finalrunde 2004

erste Prüfung - 2. April 2004

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei Γ ein Kreis und P ein Punkt ausserhalb von Γ. Eine Tangente von P an den Kreis berühre ihn in A. Eine weitere Gerade durch P schneide Γ in den verschiedenen Punkten B und C. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle APB$ schneide AB in D und AC in E. Beweise, dass das Dreieck ADE gleichschenklig ist.

2. Sei M eine endliche Menge reeller Zahlen mit folgender Eigenschaft: Aus je drei verschiedenen Elementen von M lassen sich stets zwei auswählen, deren Summe in M liegt. Wieviele Elemente kann M höchstens haben?

3. Sei p eine ungerade Primzahl. Finde alle natürlichen Zahlen k, sodass

$$\sqrt{k^2 - pk}$$

eine positive ganze Zahl ist.

4. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

5. Seien a und b feste positive Zahlen. Finde in Abhängigkeit von a und b den kleinstmöglichen Wert der Summe

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)},$$

wobei x, y, z positive reelle Zahlen sind.

SMO Finalrunde 2004

zweite Prüfung - 3. April 2004

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Bestimme alle k, für die eine natürliche Zahl n existiert, sodass $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ mit genau k Nullen endet.

7. Gegeben sind $m \geq 3$ Punkte in der Ebene. Beweise, dass man stets drei dieser Punkte A, B, C auswählen kann, sodass gilt

$$\sphericalangle ABC \leq \frac{180^\circ}{m}.$$

8. An einer Wandtafel steht eine Liste natürlicher Zahlen. Es wird nun wiederholt die folgende Operation ausgeführt: Wähle zwei beliebige Zahlen a, b aus, wische sie aus und schreibe an deren Stelle $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$. Zeige, dass sich der Inhalt der Liste ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr verändert.

9. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass gilt $|AB| + |CD| = |BC|$. Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle CDA$ auf der Seite BC zu liegen kommt.

10. Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines $n \times n$ Schachbretts sind abwechselnd weiss und schwarz gefärbt, sodass die vier Eckfelder schwarz sind. Ein L-triomino ist eine L-förmige Figur, die genau drei Felder des Brettes bedeckt. Für welche Werte von n ist es möglich, alle schwarzen Felder mit L-triominos zu bedecken, sodass keine zwei L-triominos sich überlappen? Bestimme für diese Werte von n die kleinstmögliche Zahl von L-triominos, die dazu nötig sind.